

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**ĐÀO THU THỦY**

**PHƯƠNG PHÁP CHIẾU ĐẠO HÀM  
GIẢI BÀI TOÁN TỐI ƯU LỖI VÀ  
ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN CHẤP NHẬN TÁCH**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN - 2015**

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**ĐÀO THU THỦY**

**PHƯƠNG PHÁP CHIẾU ĐẠO HÀM  
GIẢI BÀI TOÁN TỐI ƯU LỖI VÀ  
ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN CHẤP NHẬN TÁCH**

**Chuyên ngành: Toán ứng dụng**

**Mã số: 60 46 01 12**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC**

**GS.TSKH. LÊ DŨNG MƯU**

**THÁI NGUYÊN - 2015**

# Mục lục

<b>Danh mục các ký hiệu, các chữ viết tắt</b>	<b>iii</b>
<b>mở đầu</b>	<b>1</b>
<b>1 Kiến thức chuẩn bị</b>	<b>4</b>
1.1 Không gian Hilbert . . . . .	4
1.1.1 Không gian tiền Hilbert . . . . .	4
1.1.2 Không gian Hilbert . . . . .	7
1.2 Tập lồi, hàm lồi . . . . .	10
1.2.1 Tập lồi . . . . .	10
1.2.2 Hàm lồi . . . . .	15
<b>2 Phương pháp chiếu đạo hàm giải bài toán tối ưu lồi và áp dụng vào bài toán chấp nhận tách</b>	<b>24</b>
2.1 Bài toán tối ưu lồi . . . . .	24
2.2 Thuật toán chiếu đạo hàm . . . . .	32
2.2.1 Toán tử chiếu lên tập lồi trong không gian Hilbert . . . . .	32
2.2.2 Trình bày thuật toán . . . . .	40
2.2.3 Định lý hội tụ . . . . .	41
2.2.4 Ví dụ minh họa . . . . .	43
2.3 Áp dụng vào bài toán chấp nhận tách . . . . .	45
2.3.1 Phát biểu bài toán chấp nhận tách . . . . .	45

2.3.2 Áp dụng phương pháp chiếu đạo hàm giải bài toán  
chấp nhận tách . . . . . 46

**Tài liệu tham khảo . . . . . 54**

## Danh mục các ký hiệu, các chữ viết tắt

$H$	không gian Hilbert thực
$\mathbb{R}$	Tập số thực $\mathbb{R}$
$[a, b]$	Đoạn đóng của tập hợp số thực với các đầu mút $a, b$ và $a < b$
$(a, b)$	Khoảng mở của tập hợp số thực với các đầu mút $a, b$ và $a < b$
$\forall$	Với mọi
$\exists$	Tồn tại
$\langle, \rangle$	Tích vô hướng
$\ \cdot\ $	Chuẩn
$I$	Ánh xạ đồng nhất
$P_D(x)$	Hình chiếu của $x$ lên $D$
$\perp$	Vuông góc
$\subset$	Nằm trong
$\cap$	Giao
$\oplus$	Tổng trực tiếp

## Mở đầu

Tối ưu hóa được khởi nguồn như một ngành của Toán học, có rất nhiều ứng dụng trong quy hoạch tài nguyên, thiết kế chế tạo máy, điều khiển tự động, quản trị kinh doanh...trong việc tạo nên các hệ hỗ trợ ra quyết định trong quản lý và phát triển các hệ thống lớn.

Chính vì vậy, các lĩnh vực của tối ưu hóa ngày càng trở nên đa dạng mang nhiều tên gọi khác nhau như Quy hoạch toán học, Điều khiển tối ưu, Vận trù học, Lý thuyết trò chơi...Hiện nay môn học Tối ưu hóa được đưa vào giảng dạy trong nhiều chương trình đào tạo đại học cho các ngành khoa học cơ bản. Một trong những bài toán quan trọng của Tối ưu hóa là bài toán tối ưu lồi. Trong luận văn này ta sẽ xét bài toán tối ưu lồi trong không gian Hilbert và một phương pháp cơ bản để giải bài toán này là phương pháp chiếu đạo hàm. Thuật toán chiếu đạo hàm trong nhiều đề tài luận văn khác còn có tên gọi là thuật toán gradient là khá phổ biến trong lý thuyết tối ưu. Tính thông dụng của thuật toán này bắt nguồn từ phép chiếu của các điểm trên miền ràng buộc hoặc các miền ràng buộc xấp xỉ. Phép chiếu này có thể được thực hiện dễ dàng trên máy tính với một số cấu trúc của miền ràng buộc như hình hộp, hình cầu, thậm chí là đa diện. Thông qua đó, ta nghiên cứu sâu hơn về phương pháp chiếu đạo hàm trong việc giải bài toán chấp nhận tách cũng là một bài toán có nhiều ứng dụng và đang được nhiều người quan tâm nghiên cứu.

Cho  $H$  là một không gian Hilbert thực với tích vô hướng  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  và chuẩn

$\| \cdot \|$  tương ứng. Cho  $D$  là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong  $H$  và  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  lồi trên  $D$ . Trong luận văn này ta sẽ xét hai bài toán:

Bài toán thứ nhất là bài toán tối ưu lồi: Tìm

$$x^* \in D : f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in D$$

hoặc viết tương đương  $\min\{f(x) : x \in D\}$ .

Bài toán thứ hai là bài toán chấp nhận tách:

Cho  $C \subset \mathbb{R}^n$  và  $D \subset \mathbb{R}^m$  là các tập lồi đóng, khác rỗng. Tìm

$$x^* \in C : Ax^* \in D$$

trong đó  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  là toán tử tuyến tính liên tục.

Mục đích của luận văn là:

- Tổng hợp lại kiến thức cơ bản nhất về bài toán tối ưu lồi trong không gian Hilbert.
- Trình bày phương pháp chiếu đạo hàm giải bài toán tối ưu lồi trong không gian Hilbert.
- Áp dụng phương pháp chiếu đạo hàm vào bài toán chấp nhận tách.

Nội dung của luận văn gồm hai chương:

**Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.** Chương này tác giả tập trung trình bày lại kiến thức cơ bản về không gian Hilbert và giải tích lồi.

**Chương 2: Phương pháp chiếu đạo hàm giải bài toán tối ưu lồi và áp dụng vào bài toán chấp nhận tách.** Chương này tác giả trình bày hai thuật toán để giải bài toán tối ưu lồi và bài toán chấp nhận tách.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự giúp đỡ và hướng dẫn tận tình của GS.TSKH Lê Dũng Mưu. Qua đây, tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới Thầy, người đã dành nhiều thời gian và tâm huyết để hướng dẫn và tạo điều kiện cho tác giả trong suốt thời gian làm luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các Giáo sư, Phó Giáo sư công tác tại Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin, các thầy cô trong trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành đến các thầy cô.

Cuối cùng tác giả xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, lãnh đạo đơn vị công tác và đồng nghiệp đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 12 năm 2015

Học viên

**Đào Thu Thủy**



# Chương 1

## Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, ta sẽ trình bày lại một số kết quả sẽ được dùng cho chương sau. Đó là kiến thức cơ bản về không gian Hilbert và giải tích lỗi. Nội dung trong chương được trích dẫn chủ yếu từ tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [4], [5], [6].

### 1.1 Không gian Hilbert

Trong toán học, không gian Hilbert (Hilbert Space) là một dạng tổng quát hóa của không gian Euclid mà không bị giới hạn về vấn đề hữu hạn chiều. Đó là một không gian vectơ có tích vô hướng. Hơn nữa, nó thỏa mãn một yêu cầu nữa là tính đầy đủ để chắc chắn rằng giới hạn là tồn tại khi cần làm các định nghĩa khác nhau trong tính toán vi tích phân dễ dàng hơn. Không gian Hilbert đóng vai trò quan trọng trong việc hình thức hóa toán học cơ học lượng tử. Các không gian Hilbert được đặt tên theo David Hilbert, người nghiên cứu chúng trong ngữ nghĩa của phương trình tích phân.

#### 1.1.1 Không gian tiền Hilbert

**Định nghĩa 1.1.** Không gian tiền Hilbert (hay còn gọi là không gian Unita hoặc không gian với tích vô hướng) là một cặp  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ; trong đó:  $H$  là

không gian tuyến tính thực và  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  là ánh xạ được xác định như sau:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Với  $\langle x, y \rangle$  là tích vô hướng của hai vectơ  $x$  và  $y$  thỏa mãn các điều kiện sau:

- 1)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in H.$
- 2)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in H.$
- 3)  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall x, y \in H; \alpha \in \mathbb{R}.$
- 4)  $\langle x, x \rangle \geq 0 \forall x \in H; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

**Ví dụ 1.1.** Lấy  $H = C_{[0,1]}$  là không gian các hàm liên tục trên  $[0, 1]$  nhận giá trị thực với  $x, y \in H$  biểu thức  $\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt$  xác định một tích vô hướng trên  $C_{[0,1]}$ .

Khi đó không gian này là một không gian tiền Hilbert và thường kí hiệu là  $C_{[0,1]}^L$ .

Dưới đây là một số định lý quan trọng trong không gian tiền Hilbert.

**Định lí 1.1.** Cho  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  là không gian tiền Hilbert. Khi đó,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ (hay } \|x\|^2 = \langle x, x \rangle), \forall x \in H$$

là một chuẩn trên  $H$  hay chuẩn sinh bởi tích vô hướng.

**Nhận xét 1.1.**  $(H, \|\cdot\|); \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \forall x \in H$  là không gian định chuẩn.

**Định lí 1.2. (Bất đẳng thức Schwarz)** Cho  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  là không gian tiền Hilbert. Với  $\forall x, y \in H$  ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$